

АННОТАЦИЯ

диссертации Жанузаковой Динары Таупиховны на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности «6D060100-Математика» на тему:

«Методы приближенного решения прямых и обратных задач теории фильтрации»

Актуальность темы исследования. Настоящая диссертация посвящена исследованию прямых и обратных задач для некоторых математических моделей, возникающих в теории фильтрации, то есть математической модели теории фильтрации, учитывающей фазовый переход, начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения, рассмотрены обратная задача для параболического уравнения и задача реакции-диффузии. Уравнения этого типа и общие уравнения соболевского типа появляются при описании процессов тепло- и массообмена в теории фильтрации, переносе почвенной влаги, физике плазмы, народонаселении и многих других областях

Цель диссертационной работы. Исследование прямых и обратных задач теории фильтрации. В частности:

- Изучение корректности математической модели задачи типа Стефана, существования и единственности решения, предельного перехода по времени релаксации.
- Исследование однозначной разрешимости начально-краевых задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения, заданного нелинейным граничным условием. Доказательство теоремы существования и единственности слабого обобщенного решения задачи, доказательство разрушения решения задачи для квазилинейного псевдопараболического уравнения с нелинейным краевым условием и исследование асимптотической устойчивости решения во времени.
- Нахождение слабого решения обратной задачи для квазилинейного параболического уравнения, изучение устойчивости решения, а также доказательство разрушения решения за конечное время.
- Доказательство теоремы нахождения решений конкурентной системы с нелинейной кросс-диффузией для однофазной и двухфазной структур. Поиск конкретных областей решений.

Научная новизна работы. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и строго доказанными. Полученные результаты имеют теоретическое и практическое значение и могут быть использованы при создании общей теории прямых и обратных задач.

- Получено существование и единственность решения одной модели теории фильтрации типа Стефана с фазовой релаксацией. Доказана лемма о предельном переходе по времени релаксации. Представлены численные эксперименты.

-Доказана теорема существования и единственности обобщенного слабого решения начально-краевой задачи для квазилинейного псевдопараболического уравнения с нелинейным краевым условием типа Неймана-Дирихле. При этом были получены достаточные условия для окончательного разрушения их решения.

- Методом Галеркина доказано существование слабого решения обратной задачи для квазилинейного уравнения параболического типа с интегральным условием, заданным переопределением, и получена устойчивость решения.

- Показано, что существуют два различных типа периодических стационарных решений для некоторых диапазонов параметров нелинейной кросс-диффузионной конкурентной системы. Восьмимерное пространство параметров разделено, и показаны области Тьюринга решений. Помимо аналитических методов были предложены численные методы исследования свойств решений.

Методы научного исследования. Для достижения результатов исследования использовались метод аппроксимации Галеркина, метод априорного оценивания, теория пространства Соболева, методы интегрального и дифференциального исчисления, метод функционального анализа, метод компактности, метод монотонности, необходимые интерполяционные неравенства, неравенства Юнга, Гельдера и Минковского.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Полученные результаты имеют теоретическое и практическое значение, а полученные результаты представляют в первую очередь теоретический интерес. По достигнутым результатам исследования возможно проведение вычислительных экспериментов и получение численных значений решений.

Публикации. По результатам диссертационного исследования опубликовано 13 работ, в том числе:

– 3 статьи в научных журналах, входящих в четвертый и первый квартили (Q4 и Q1) отчетов Clarivate Analytics Journal Citation Reports соответственно и/или с процентилями CiteScore 35, 91, 96 [97, 98] в базе данных Scopus соответственно:

1. Aitzhanov S.E., Zhanuzakova D.T. Behavior of solutions to an inverse problem for a quasilinear parabolic equation // Siberian Electronic Mathematical Reports. -2019. –Vol. 16. –P.1366-1382. DOI 10.33048/SEMI.2019.16.097 (Scopus: процентиль – 35%, Web of Science: Q4, SJR – 0.516).

2. Aitzhanov S.E., Zhanuzakova D.T. An initial boundary value problem for a pseudoparabolic equation with a nonlinear boundary condition // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2022. DOI 10.1002/mma.8568 (Scopus: процентиль – 91%, Web of Science: Q1, SJR – 0.702).

3. Kersner R., Klincsik M., Zhanuzakova D.T. A competition system with nonlinear cross-diffusion: exact periodic patterns//Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales-Serie A: Mathematicas. 2022. DOI

10.1007/s13398-022-01299-1 (Scopus: процентиль – 96%, Web of Science: Q1, SJR – 1.055).

– 3 статьи в журналах, рекомендованных комитетом по обеспечению качества в сфере образования и науки МОН РК

1. Айтжанов С.Е., Жанузакова Д.Т. Разрушение решений обратной задачи для уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью // Вестник, КазНПУ имени Абая, 63, #3, 2018.

2. Айтжанов С.Е., Жанузакова Д.Т. Разрушение решений обратной задачи для параболического уравнения//Вестник КазНТУ; Серия технических наук, 3, #133, 2019.

3. Мухамбетжанов С.Т., Жанузакова Д.Т. О корректности одной модели теории фильтрации типа Стефана// Вестник, КазНПУ имени Абая, 65#1, 2019

– 7 публикаций в сборнике международных конференций:

1.Обоснование метода фиктивных областей для модели Маскета-Лeverетта// Международная научно-методическая конференция "Математика в Казахстане-прошлое и перспективы", посвященная 100-летию Ибрашева Хасана Ибрашевича, 2016

2.On the Application of Quasi-Conformal Mappings to Solve the Problem of Filtration Theory//The 5th Abu Dhabi University Annual International Conference Mathematical Science and its Applications, 2017

3. About One Problem of the Isothermal Filtration Process//The 6th Abu Dhabi University Annual International Conference Mathematical Science and its Applications, 2017

4. On the Development of a Mathematical Model of Nonequilibrium Filtration //The 7th Abu Dhabi University Annual International Conference Mathematical Science and Its Applications, 9-12 May 2018

5.Разрушение решений обратной задачи для параболического уравнения со степенной нелинейностью//Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры, 2019

6. Correctness of a one mathematical model of nonequilibrium phase transitions of water in porous media// "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры", VIII международная научная конференция, 01.11. 2018

7. An initial boundary value problem for a pseudoparabolic equation with a nonlinear boundary condition// "Обратные и некорректные задачи в естествознании", 11-12 апреля, 2023

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 частей (каждая часть делится на подразделы), заключения и списка использованной литературы. В работе 8 рисунков. Объем диссертационной работы составляет 105 страниц.

Основное содержание диссертации. Во введении предложенной диссертации представлена актуальность и новизна работы, сформулирована цель работы, установлены основные правила, а также дано краткое содержание диссертации.

В первой главе вводятся необходимые обозначения, даются

необходимые определения, известные леммы, теоремы и основные неравенства.

Во второй главе представлена математическая модель теории фильтрации, учитывающая фазовый переход:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{1}{\tau} (H(c) - s), \\ m \cdot \frac{\partial c}{\partial t} &= D \cdot \Delta c - v \cdot \nabla c - \frac{\partial s}{\partial t}. \end{aligned}$$

Предполагается найти функции $c(x, t)$, $s(x, t)$ (концентрация ПАВ в жидкой и твердой фазах), удовлетворяющие данной математической модели с учетом фазовой релаксации. Корректность этой модели было проверено. Доказаны существование и единственность решения. Представлены численные эксперименты.

Третья глава посвящена исследованию качественного свойства решения задачи о газированной жидкости. Рассматривается фундаментальная проблема исследования решения начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения в области с достаточно гладкой границей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (u - \chi \Delta u) - (a_0 + a_1 \|\nabla u\|_{2, \Omega}^{2q-2}) \Delta u &= b(x, t) |u|^{p-2} u + f(x, t) \quad (x, t) \in Q_T, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + k(x, t) |u|^{\sigma-2} u|_{\Gamma} &= 0, \quad \Gamma = \partial \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

В этой главе доказывается существование слабого решения начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения в ограниченной области методом Галеркина. Априорные оценки решения были получены с помощью теорем вложения Соболева. На основе априорных оценок доказана локальная теорема существования и единственности обобщенного слабого решения начально-краевой задачи для квазилинейного псевдопараболического уравнения. Получены достаточные условия разрушения решений задачи Неймана-Дирихле, заданных нелинейным граничным условием в ограниченной области.

В четвертой главе рассматривается обратная задача в цилиндре $Q_T = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in (0, T)\}$ с интегральным условием, заданным переопределением, которое применяется к нелинейному уравнению параболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (u + a_0 |u|^{p-2} u) - \Delta u + a(x, t, u, \nabla u) &= |u|^{p-2} u + f(t) w(x), \\ x \in \Omega, \quad 0 < t < T \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

$$u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0,$$

$$\int_{\Omega} (u + a_0 |u|^{p-2}u)\omega dx = \varphi(t), \quad 0 < t < T.$$

Предполагается определить пару функций $(u(x,t), f(t))$ удовлетворяющих квазилинейной обратной задаче параболического типа второго порядка. Существование слабого решения обратной задачи доказывается методом Галеркина. Получены достаточные условия разрушения решения за конечное время в измеряемой области с однородным условием Дирихле, а также получена устойчивость решения нелинейной обратной знакопеременной задачи по степенному типу.

В пятой главе рассматривается конкурентная система с нелинейной кросс-диффузией:

$$\begin{cases} u_t = (uu_x + \varepsilon_1 uv_x + \varepsilon_3 vu_x)_x + u(1 - u - cv) := -\frac{\partial}{\partial x} J_1 + u(1 - u - cv), \\ v_t = (dvv_x + \varepsilon_4 uv_x + \varepsilon_2 vu_x)_x + v(a - bu - v) := -\frac{\partial}{\partial x} J_2 + v(a - bu - v). \end{cases}$$

Исследованы две различные системы реакции-диффузии (РД). Показано, что для некоторого диапазона параметров существуют два различных типа периодических стационарных решений. Восьмимерное пространство параметров разделено областями Тьюринга с решениями. Проведены некоторые численные расчеты, позволяющие предположить, что решения являются аттракторами с большой областью притяжения в пространстве начальных функций.